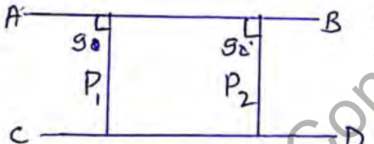
Topics →

GEOMETRY
ज्यामिति

रेखा एवं कोण :-

A ———— B रेखा संकेत → $\overline{AB}$

समान्तर रेखाये :-



→ यहाँ AB व CD एक दूसरे की समान्तर रेखाये है, इन्हें 0° रेखा / अप्रतिच्छेदी रेखा भी कहते हैं।

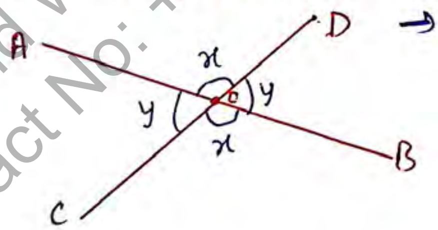
→ संकेत → $AB \parallel CD$

→ समान्तर रेखाओं के बीच की लम्बवत दूरिया हमेशा बराबर होती है

$P_1 = P_2$

→ AB व CD की लंबाइयाँ बराबर हो तो संकेत $AB = CD$.

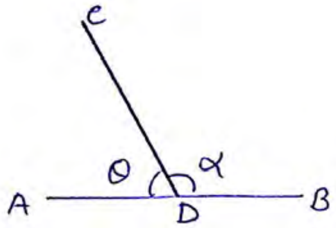
असमान्तर रेखाये :-



→ प्रतिच्छेदी रेखा भी कहते हैं।

→ यदि दो रेखाये प्रतिच्छेद करती है तो शीर्षाभिमुख कोण बराबर होते है। यहाँ $\angle AOD = \angle COB$ व $\angle AOC = \angle DOB$ होंगे।

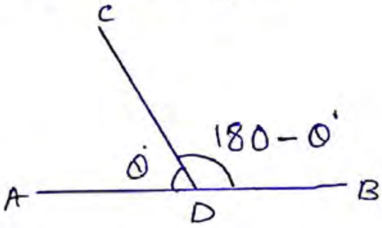
→

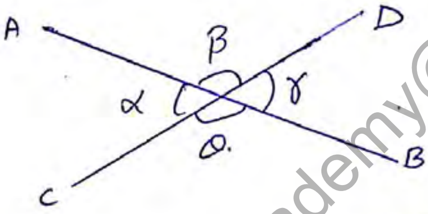


यदि $\theta+\alpha=180^\circ$ हो तो कोण θ व α सम्पूरक / अनुपूरक / supplentary होंगे।

यदि $\theta+\alpha=90^\circ$ हो तो → θ व α पूरक / complementary कोण होंगे।

रैखिक कोण युग्म :-





रैखिक कोण युग्म
↓
α व β
β व γ
γ व θ
θ व α

व $\alpha=\gamma$, $\beta=\theta$ (शीर्षाभिमुख कोण)

कोण का मापन :-

अंश मापन या षाष्टिक पद्धति		रेडियन मापन या वृतीय पद्धति
डिग्री	← (इकाई) →	रेडियन
x°	← (संकेत) →	x^c, x, x रेडियन

→ π रेडियन $= 180^\circ$ डिग्री

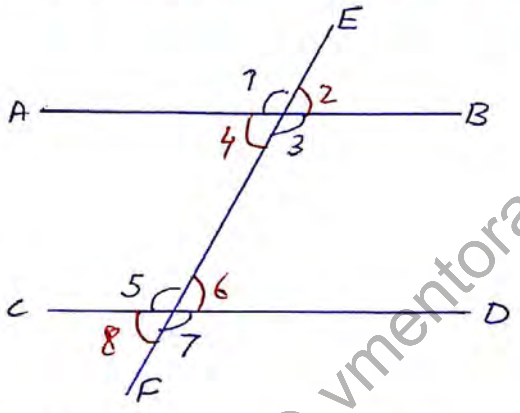
1 रेडियन $= \frac{180^\circ}{\pi}$ or $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ रेडियन

$\boxed{x \text{ रेडियन} = \frac{180^\circ}{\pi} \times x \text{ डिग्री}}$ or $\boxed{x^\circ = \frac{\pi}{180} \times x \text{ रेडियन}}$

कोणों के प्रकार:-

1. जब $0^\circ < \theta^\circ < 90^\circ$ हो — न्यून कोण
2. जब $\theta = 90^\circ$ हो — समकोण
3. जब $90^\circ < \theta^\circ < 180^\circ$ हो — अधिक कोण
4. जब $\theta^\circ = 180^\circ$ हो — ऋजु / सरल कोण
5. जब $180^\circ < \theta^\circ < 360^\circ$ हो — वृहत कोण

जब दो समान्तर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा काटे तो —



→ ① शिर्षाभिमुख कोण बराबर होंगे।

$\angle 1 = \angle 3$ | $\angle 2 = \angle 4$

$\angle 5 = \angle 7$ | $\angle 6 = \angle 8$

→ ② संगत कोण बराबर / समान होंगे -

$\angle 2 = \angle 6$ | $\angle 1 = \angle 5$

$\angle 3 = \angle 7$ | $\angle 4 = \angle 8$

→ ③ एकांतर कोण बराबर होंगे -

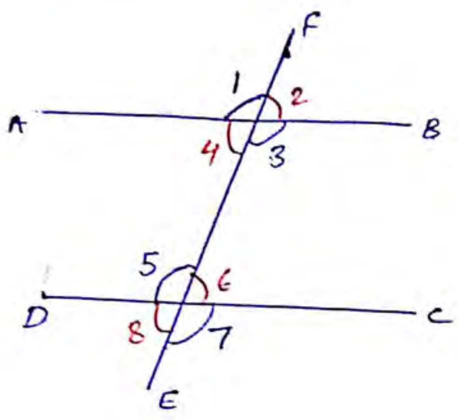
$\angle 3 = \angle 5$ (आंतरिक एकांतर कोण) | $\angle 1 = \angle 7$ (बाह्य एकांतर कोण)

$\angle 4 = \angle 6$ | $\angle 2 = \angle 8$

→ ④ एक ही तरफ के अंतःकोणों व बाह्यकोण/बहिष्कोणों का योग 180° होगा —

$\angle 3 + \angle 6 = \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$ (अंतः कोण)

$\angle 1 + \angle 8 = \angle 2 + \angle 7 = 180^\circ$ (बहिष्कोण)



→ यदि तिर्यक् रेखा व रेखा के बीच एक कोण 90° का हो तो सारे angles 90° के होंगे।

→ यदि एक भी कोण 90° का न हो तो
→ Less than 90° → सारे बराबर
→ Greater than 90° → सारे बराबर

ex :- $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8$
and $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7$

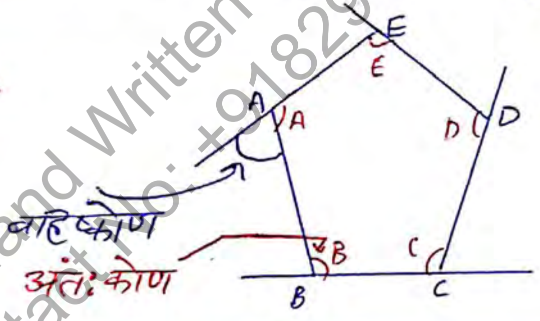
बहुभुज

- उत्तल बहुभुज (Convex) → $\theta < 180^\circ$ → त्रिभुज
- अवतल बहुभुज (Concave) → कम से कम एक angle $\theta > 180^\circ$ → चतुर्भुज

← (ex) →

सबसे कम भुजा वाला बहुभुज — त्रिभुज

#



बहुभुज के किसी एक ही बिन्दु पर
अंतःकोण + बहिष्कोण $= 180^\circ$

सभी बहिष्कोणों का योग $= 360^\circ$

#

बहुभुज	भुजाये	कोण
सम बहुभुज →	✓	✓
विषम बहुभुज →	×	×

समबहुभुज :-

बहिष्कोण $= \frac{360°}{n}$ अंतःकोण $= 180° - \frac{360°}{n}$ (यहाँ n = no. of Lines (भुजा))

भुजाओं की संख्या n	बहिष्कोण	अंतःकोण
3	120°	60°
4	90°	90°
5.	72°	108°
6	60°	120°
7	$51\frac{3}{7}°$	$128\frac{4}{7}°$
8	45°	135°
9	40°	140
10	36°	144
भुजाओं की संख्या बढ़ने पर →	बहिष्कोण का मान कम/घट रहा है।	अंतःकोण का मान ज्यादा/बढ़ रहा है।

जब बहिष्कोण > अंतःकोण हो तो वह समबहुभुज - समबाहु त्रिभुज होगा।

जब बहिष्कोण = अंतःकोण हो तो वह - वर्ग होगा।

समबाहु त्रिभुज व समषटभुज के →
अंतःकोण $\xrightarrow[\text{Interchange}]{}$ बहिष्कोण होते हैं।

प्रत्येक अंतःकोण (समबहुभुज) $= 180° - \frac{360°}{n}$

$$= 180°\left(\frac{n-2}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{2n-4}{n}\right) \times 90°$$

अंतः कोणों का योग (सम/विषम बहुभुज) $= (2n-4) \times 90°$

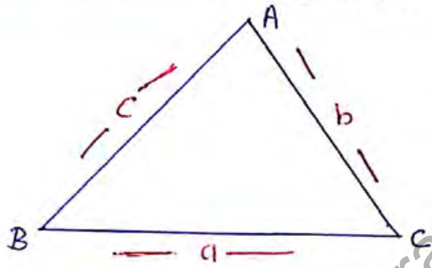
\# विकर्णों की संख्या $= \frac{n(n-3)}{2}$

Ex: Δ के विकर्णों की संख्या $(n=3)$ $= \frac{3(3-3)}{2} = 0$ विकर्ण

▱ के विकर्णों की संख्या $(n=4)$ $= \frac{4(4-3)}{2} = 2$ विकर्ण

TRIANGLE (त्रिभुज) -

तीन असंरेख बिन्दुओं से घिरी आकृति



Conditions :-

① किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होता है।

$a+b>c$ or $b+c>a$ or $c+a>b$

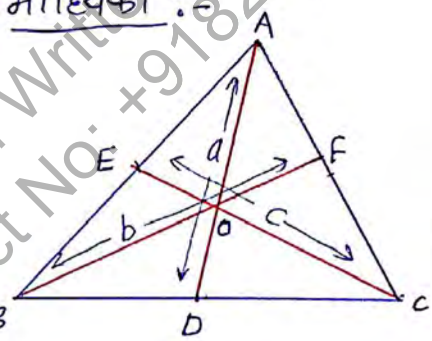
② किसी त्रिभुज की दो भुजाओं का अन्तर तीसरी भुजा से कम होता है।

$a-b<c$ or $b-c<a$ or $c-a<b$

\# परिमाप $P = a+b+c$, अर्द्धपरिमाप $s = \frac{a+b+c}{2}$.

\# क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ "हीरेन सूत्र"

\# माध्यिका :-



किसी त्रिभुज के एक शीर्ष से सामने वाली भुजा के मध्य बिन्दु को मिलाने वाली सीधी रेखा Δ की माध्यिका कहलाती है।

→ यहाँ a, b, c, ΔABC की 3 माध्यिकायें हैं।

अतः $BD = DC$, $AF = FC$, व $AE = EB$

→ $s = \frac{a+b+c}{2}$ (a, b, c → Δ की माध्यिकायें हैं)

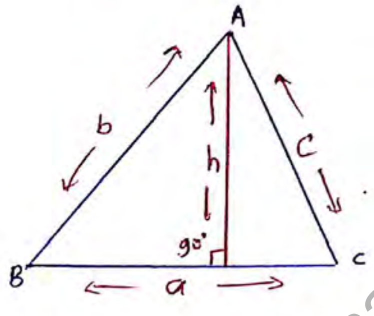
→ क्षेत्रफल $= \frac{4}{3}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(a, b, c) माध्यिका वाले Δ का क्षेत्र. = $\frac{4}{3}$ × (a, b, c) भुजा वाले Δ का क्षेत्रफल

जब Δ की एक भुजा (आधार) व उसकी ऊँचाई (h) दी गई हो तो

Δ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times a \times h$



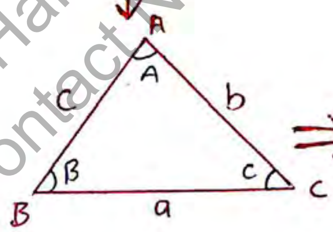
त्रिभुज के प्रकार :-

A. कोण के आधार पर

- न्यूनकोण Δ → तीनों कोण - न्यूनकोण (<90°) → $c^2 < (a^2+b^2)$ [c → सबसे बड़ी भुजा]
- समकोण Δ → एक कोण - समकोण → $c^2 = a^2+b^2$
- अधिक कोण Δ → एक कोण - अधिककोण → $c^2 > a^2+b^2$

B. भुजाओं के आधार पर

- विषमबाहु त्रिभुज → तीनों भुजा, तीनों कोण → असमान
- समद्विबाहु Δ → दो भुजा, दो कोण → बराबर [समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर]
- समबाहु Δ → तीनों कोण, तीनों भुजायें → समान; प्रत्येक θ = 60°



⇒ यदि $c < b < a$ हो तो $\angle C < \angle B < \angle A$

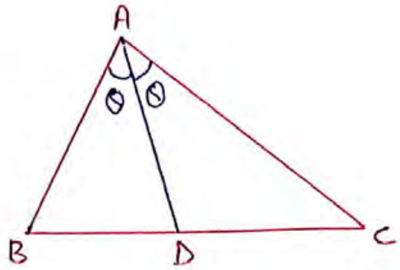
⇒ बड़ी भुजा के सामने → बड़ा कोण

छोटी भुजा के सामने → छोटा कोण

कोण का समद्विभाजन :-

यदि रेखा AD, कोण A को समद्विभाजित करती है तो →

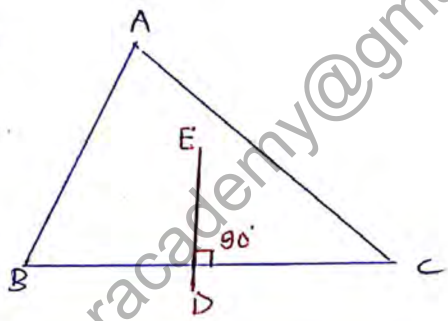
$$\boxed{BD : DC = AB : AC}$$ होगा



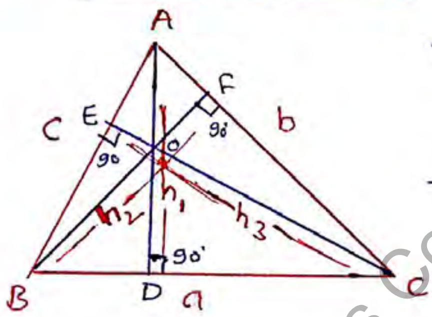
भुजा का लम्ब अर्द्धक / समद्विभाजक :-

→ यदि ED रेखा, भुजा BC की लम्ब अर्द्धक है तो BD = DC व ED ⊥ BC होगी

→ जब AB = AC हो तो ED, शीर्ष A से गुजरेगी, अन्यथा नहीं।



शीर्षलम्ब / ऊँचाई :-



→ त्रिभुज के एक शीर्ष से सामने वाली भुजा पर डाला गया लम्ब शीर्षलम्ब (ऊँचाई) कहलाता है।

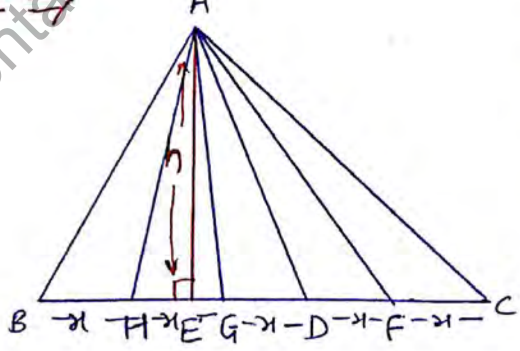
→ AD ⊥ BC, BF ⊥ AC व CF ⊥ AB

→ ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}a \cdot h_1 = \frac{1}{2}b h_2 = \frac{1}{2}c h_3$

⇒ $\boxed{a h_1 = b h_2 = c h_3}$ or. $\boxed{a : b : c = \frac{1}{h_1} : \frac{1}{h_2} : h_3}$

⇒ बड़ी भुजा पर शीर्षलम्ब → छोटा
छोटी भुजा पर शीर्षलम्ब → बड़ा
समान भुजाओं के शीर्षलम्ब → समान

⇒

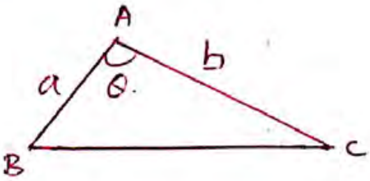


एक ही शीर्ष तथा एक ही आधार रेखा पर बने सभी त्रिभुजों की ऊँचाईयां (h) बराबर होती है तथा इनका क्षेत्रफल आधार की लम्बाईयों के समानुपाती होगा।

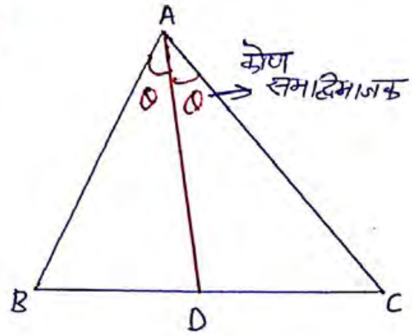
⇒ ΔABC का क्षे० : ΔAHD का क्षे० : ΔABF का क्षे०
BC : HD : BF
⇒ 5 : 2 : 4

जब △ की दो भुजाओं की लम्बाई व उनके मध्य के कोण का मान दिया हो तो

$$\boxed{\triangle \text{ का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \sin\theta}$$



#



$$\frac{\cancel{\frac{1}{2}} \times AB \times \cancel{AD} \cdot \cancel{\sin\theta}}{\cancel{\frac{1}{2}} \times AC \times \cancel{AD} \cdot \cancel{\sin\theta}} = \frac{BD}{DC}$$

$$\boxed{\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC}}$$

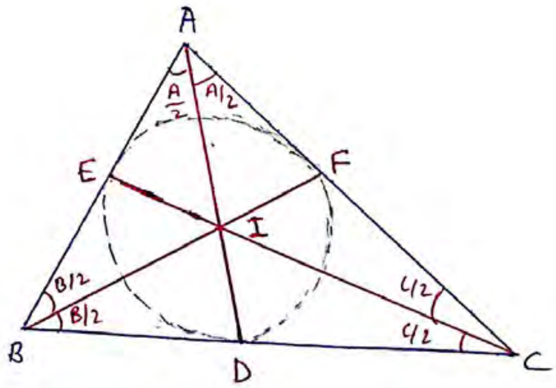
त्रिभुज के केन्द्र :-

- 1. अन्तः केन्द्र (In Center)
- 2. परिकेन्द्र (Circum Center)
- 3. लम्ब केन्द्र (Ortho Center)
- 4. केन्द्रक (Centroid)

1. अन्तः केन्द्र (In Center) :-

→ △ के तीनों कोणों के आन्तरिक समद्विभाजकों का प्रतिच्छेदी बिन्दु अन्तः केन्द्र (I) कहलाता है।

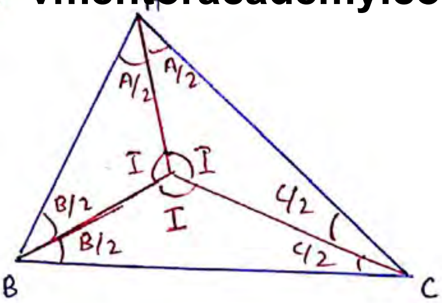
→ तीनों भुजाओं से समदूरस्थ बिन्दु अर्थात अन्तः केन्द्र से तीनों भुजाओं पर डाले गये लम्ब की लम्बाई समान होती है।



→ यह अन्तः वृत का केन्द्र होता है।

→ यदि △ के दो कोणों के समद्विभाजक किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करे तो तीसरे कोण का समद्विभाजक भी उसी बिन्दु से गुजरेगा।

#



ΔABC में →

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

or $\angle\frac{A}{2} + \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} = 90^\circ$ —①

Now ΔBIC में →

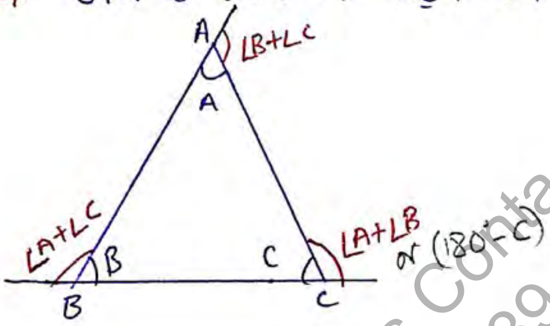
$\angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} + \angle I = 180^\circ$ —②

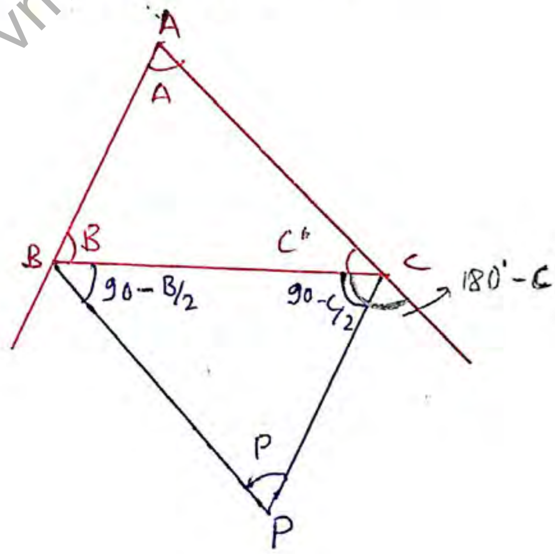
समी. ① से $\angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2} = 90 - \angle\frac{A}{2}$ समी. ② में रखने पर →

$90^\circ - \angle\frac{A}{2} + \angle I = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\angle I = 90^\circ + \angle\frac{A}{2}}$ **

$\therefore$ $\angle BIC = 90^\circ + \angle\frac{A}{2}$, $\angle AIC = 90^\circ + \angle\frac{B}{2}$ व $\angle AIB = 90^\circ + \angle\frac{C}{2}$

जब दो कोणों के बाह्य समद्विभाजक प्रतिच्छेद करें तो →





ΔABC में →

$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ —①

ΔBCP में →

$\cancel{90} - \angle\frac{B}{2} + \cancel{90^\circ} - \angle\frac{C}{2} + \angle P = \cancel{180^\circ}$

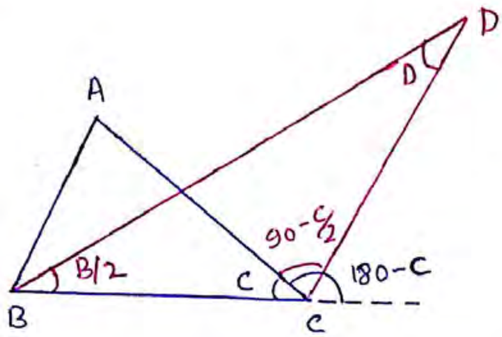
$\angle P = \angle\frac{B}{2} + \angle\frac{C}{2}$ —②

समी. ① से मान रखने पर →

$\boxed{\angle P = 90^\circ - \angle\frac{A}{2}}$ **

यदि एक कोण के आन्तरिक व दूसरे का बाह्य समद्विभाजक प्रतिच्छेद करे :-

#



$\triangle ABC$ में $\rightarrow$

$$\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2} = 90 \quad \text{—— (1)}$$

$\triangle BCD$ में $\rightarrow$

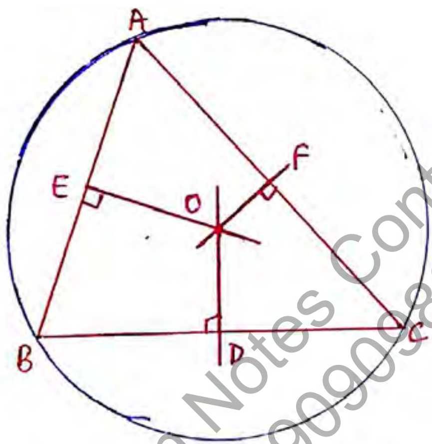
$$\frac{\angle B}{2} + 90^\circ - \frac{\angle C}{2} + \angle C + \angle D = 180^\circ$$

$$\underbrace{\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}} + 90^\circ + \angle D = 180^\circ \quad \text{—— (2)}$$

समी. (1) से मान रखने पर $\rightarrow$

$$\cancel{90} - \frac{\angle A}{2} + \cancel{90^\circ} + \angle D = \cancel{180^\circ} \Rightarrow \boxed{\angle D = \frac{\angle A}{2}} \quad \#\#$$

2. परिकेन्द्र (Circumcenter) :-



$\rightarrow$ $\triangle$ की तीनों भुजाओं के लम्ब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु परिकेन्द्र कहलाता है।

$\rightarrow$ परिकेन्द्र से तीनों शीर्ष समदूरस्थ होते हैं, अर्थात $OA = OB = OC = r$ (परित्रिज्या)

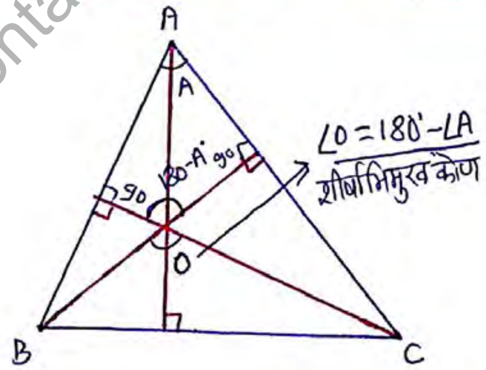
$\rightarrow$ यह परिवृत का केन्द्र होता है।

$\rightarrow$ परिवृत के लिये $\triangle$ की भुजा जीवा होगी।

$\rightarrow$ यहाँ $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$ व $\angle AOB = 2\angle C$

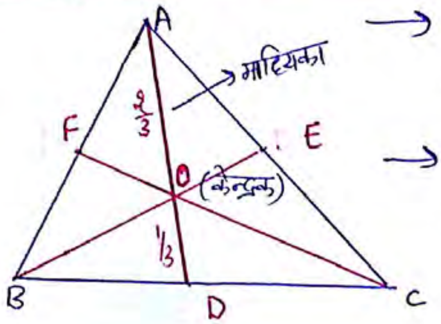
[किसी भी जीवा द्वारा केन्द्र पर बनाया गया कोण, उसी जीवा द्वारा परिधि पर बनाये गये कोण का 2 गुणा होता है]

3. लम्बकेन्द्र (Orthocenter) :-



$\rightarrow$ $\triangle$ के तीनों शीर्षों से सामने की भुजाओं पर डाले गये लम्ब, जिस बिन्दु पर मिलते हैं, लम्बकेन्द्र कहलाता है।

केन्द्रक (Centroid) :-

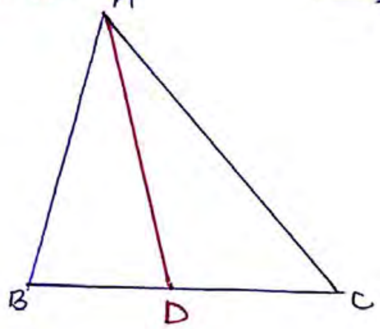


→ किसी भी Δ की तीनों माध्यिकाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु, केन्द्रक कहलाता है।

→ केन्द्रक, माध्यिका को 2 : 1 में विभाजित करता है

अर्थात $\boxed{AO : OD = BO : OE = CO : OF = 2 : 1}$

##

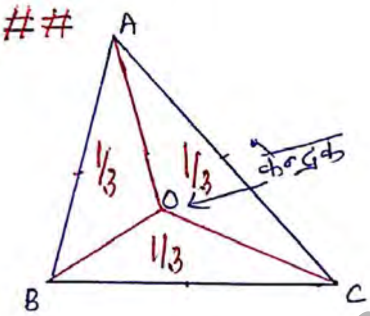


→ यदि Δ ABC की एक माध्यिका AD हो तो

$\boxed{AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)}$ होगा

Apolonious Rule

##



यहाँ Δ ABC का क्षेत्रफल = 3 × Δ AOC का क्षेत्र॰

= 3 × Δ BOC ''

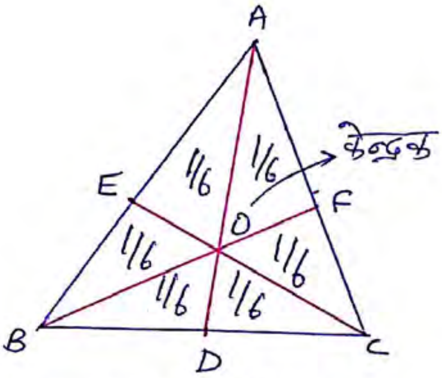
= 3 × AOB का क्षेत्र॰

or

ΔAOC का क्षेत्रफल = $\frac{1}{3}$ × Δ ABC का क्षेत्रफल

यहाँ Δ की माध्यिकाओं से मिलकर बने हर Δ का क्षेत्र॰ ΔABC का $\frac{1}{6}$ गुणा होगा।

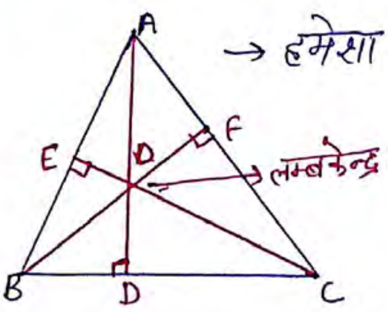
⇒ Δ AEO का क्षेत्र॰ = $\frac{1}{6}$ × Δ ABC का क्षेत्रफल



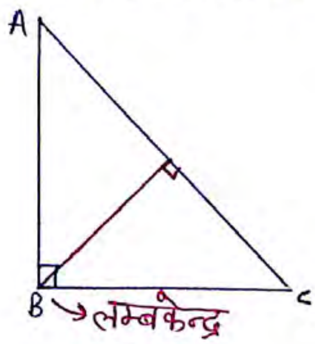
→ केन्द्रक / अन्तः केन्द्र हमेशा Δ के अन्दर ही होते है।

⇒⇒ न्युनकोण Δ का लम्बकेन्द्र :

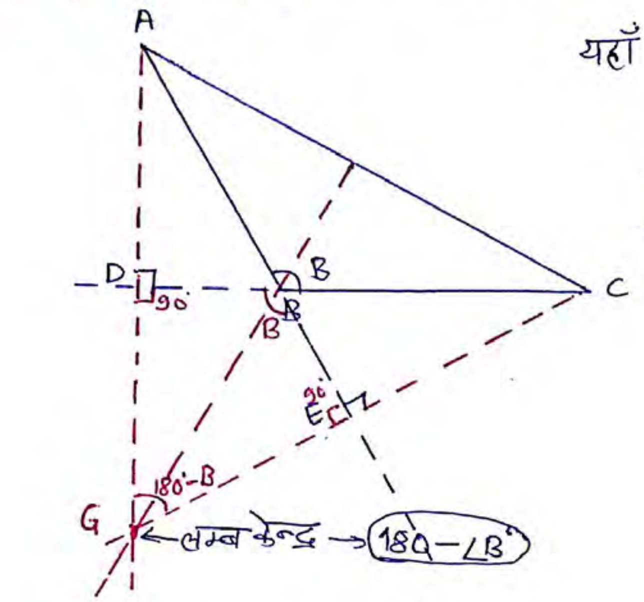
→ हमेशा Δ के अन्दर होगा



⇒⇒ समकोण Δ का लम्ब केन्द्र :-



अधिक कोण का लम्ब केन्द्र →



यहाँ △ABC का लम्ब केन्द्र → G

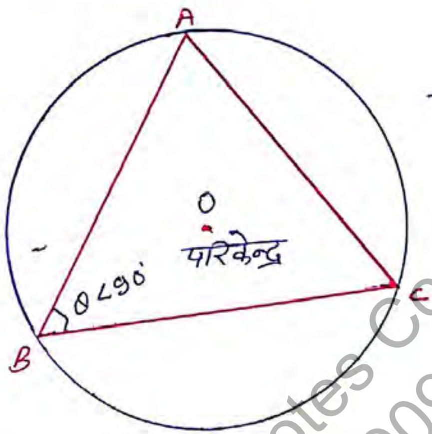
△ABG का लम्ब केन्द्र → C

△BGC का लम्ब केन्द्र → A

△AGC का लम्ब केन्द्र → B

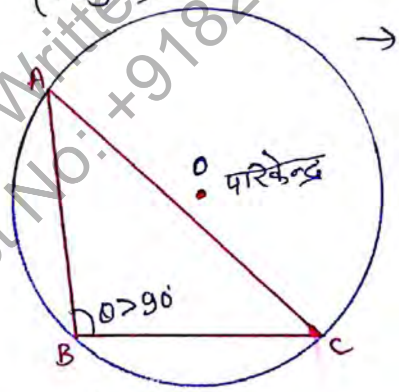
Location of परिकेन्द्र (Circumcenter) :-

1. न्यूनकोण△में →



→ न्यूनकोण △ का परिकेन्द्र △ के अन्दर होता है।

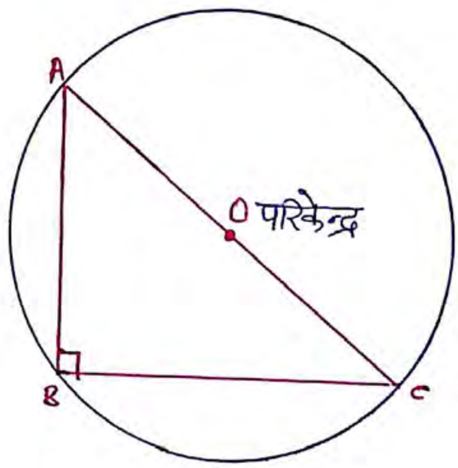
2. अधिक कोण में (त्रिभुज) →

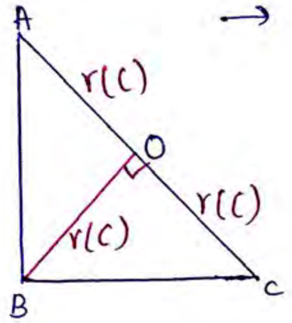


→ अधिककोण त्रिभुज का परिकेन्द्र सबसे बड़ी भुजा के बाहर की तरफ होगा।

3. समकोण △में :-

→ समकोण △ में परिकेन्द्र कर्ण का मध्य बिन्दु होगा।

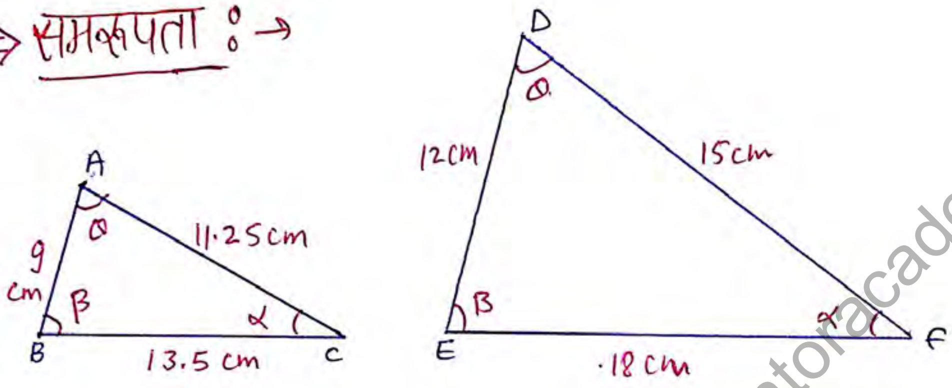


⇒ 

→ समकोण त्रिभुज में

$AO = OB = OC = r(c)$ = परिकेन्द्र की त्रिज्या होगी।

⇒ समरूपता :→



→ समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाये समानुपाती तथा संगत कोण समान होते है।

→ यदि $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ समरूप है तो →

$$\boxed{\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}}$$ → "थेल प्रमेय"

संकेत → $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

समरूपता के प्रकार →

1. भुजा - भुजा - भुजा / Side-Side-Side समरूपता (S-S-S)
2. कोण - कोण - कोण / Angle-Angle-Angle समरूपता (A-A-A)
3. भुजा - कोण - भुजा / Side-Angle-Side समरूपता (S-A-S)

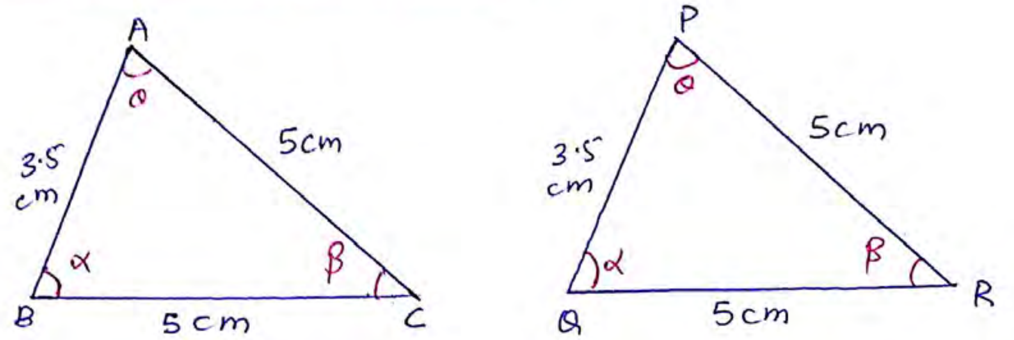
⇒ यदि $\triangle ABC$ व $\triangle DEF$ समरूप हो तो

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{x}{y} \text{ (Let)}$$

→ इनकी संगत माध्यिका, शीर्षलम्ब, परिमापों का अनुपात $= \frac{x}{y}$

→ इनके क्षेत्रफलों का अनुपात $= \frac{x^2}{y^2}$ होगा।

सर्वांगसमता (Congruence):

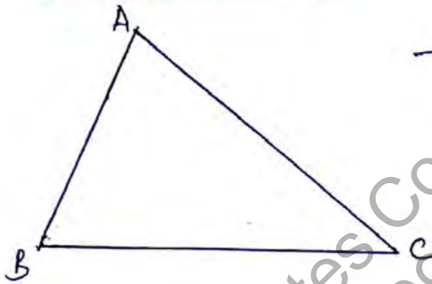


→ ΔABC व ΔPQR परस्पर सर्वांगसम होंगे यदि दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाये व संगत कोण बराबर हो।

→ संकेत $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

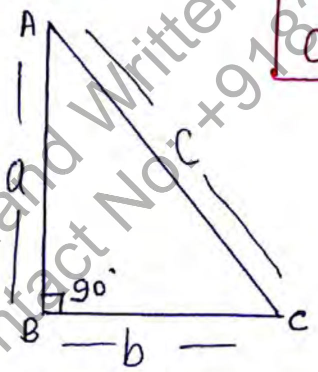
→ $\boxed{\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{1}{1}}$

विषमबाहु त्रिभुज :-



→ शीर्षलम्ब, भुजा, माध्यिका, कोण
↓
असमान

समकोण त्रिभुज:



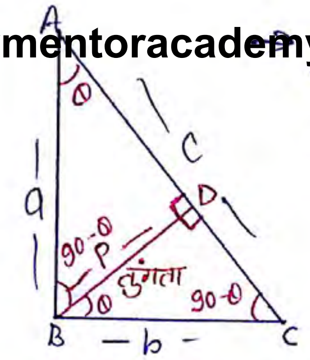
$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ "पाइथागोरस प्रमेय"

पाइथागोरस त्रिक :- पाइथागोरस प्रमेय दर्शाने वाली भुजाओं का अनुपात

अनुपात → 3 : 4 : 5
5 : 12 : 13
8 : 15 : 17
7 : 24 : 25
20 : 21 : 29

12 : 35 : 37
9 : 40 : 41
11 : 60 : 61
48 : 55 : 73
etc.

तुंगता → समकोण △ में समकोण से कर्ण पर डाला गया शीर्षलम्ब



समकोण △ABC का क्षेत्र. $= \frac{1}{2} \times BC \times AB$ — ①

$= \frac{1}{2} \times AC \times BD$ — ②

समी. ① व ② से →

$\boxed{AB \times BC = AC \times BD}$

या $\boxed{\text{लम्ब} \times \text{आधार} = \text{कर्ण} \times \text{तुंगता}}$ → $a \times b = c \times P$ — ③

⇒ यहाँ $\triangle ABC \sim \triangle ADB \sim \triangle BDC$ है अत:-

$\frac{BD}{DC} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \boxed{BD^2 = AD \times DC}$ — ④

⇒ we know that $a \times b = c \times P$

$\Rightarrow \frac{1}{P^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} \Rightarrow \frac{1}{P^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$

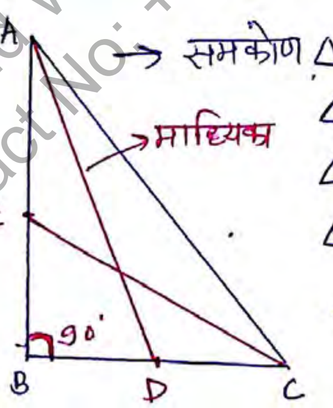
$\Rightarrow \boxed{P^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$ or $\frac{1}{P^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}$ — ⑤

⇒ Now $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{BD} \xrightarrow{\text{on square}} \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^2}{BD^2}$

समी. ④ से मान रखने पर → $\frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD^{\cancel{2}}}{\cancel{AD} \times DC}$

$\Rightarrow \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \boxed{AD : DC = AB^2 : BC^2}$ — ⑥

→ समकोण △ABC की दो माध्यिका AD व EC है।



△ABC में → $AC^2 = AB^2 + BC^2$ — ①

△ABD में → $AD^2 = AB^2 + \frac{BC^2}{4}$ — ②

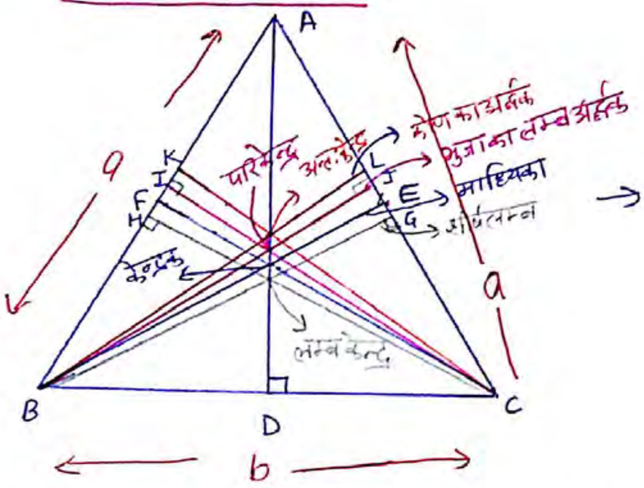
△EBC में → $CE^2 = BC^2 + \frac{AB^2}{4}$ — ③

समी. ② + ③ → $AD^2 + CE^2 = \frac{5}{4}(\underbrace{AB^2+BC^2}_{\hookrightarrow AC^2})$

∴ $\boxed{AD^2 + CE^2 = \frac{5}{4}AC^2}$

या $\boxed{AC^2 = \frac{4}{5}(AD^2 + CE^2)}$

समद्विबाहु त्रिभुज :



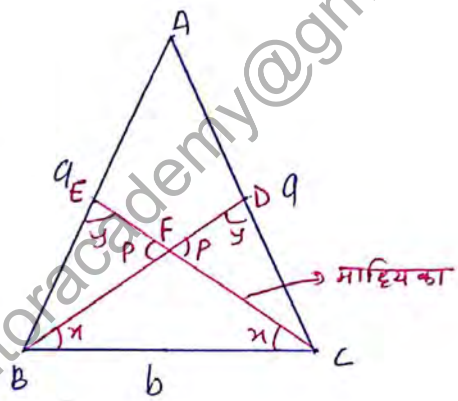
→ चारों केन्द्र संरेख होते हैं।

⇒ यदि BD व EC, $\triangle ABC$ की माध्यिकायें हैं तो

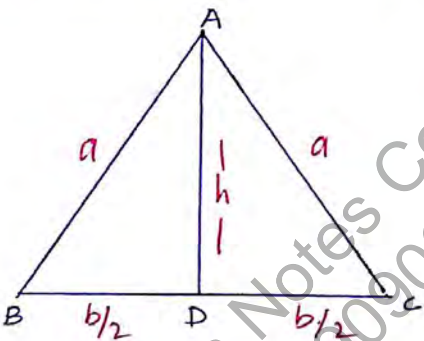
$\triangle BFE \cong \triangle CFD$

व

$\triangle EBC \cong \triangle DCB$ होंगे।



परिमाप व क्षेत्रफल :-



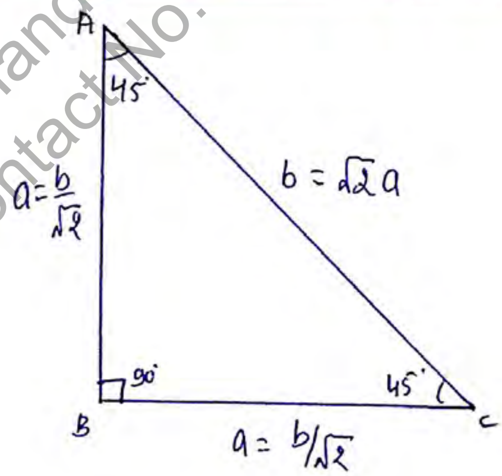
परिमाप $P = (2a+b)$

ऊँचाई $h = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

$$\boxed{A = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2-b^2}}$$ ***

समकोण समद्विबाहु त्रिभुज :-



परिमाप $= 2a + \sqrt{2}a = (2+\sqrt{2})a$

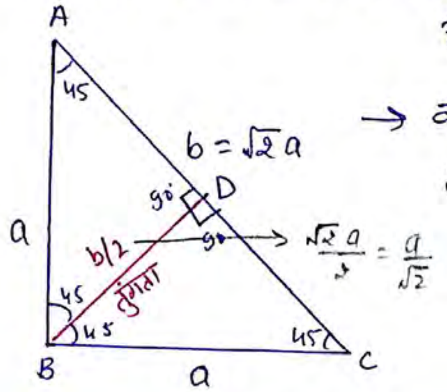
or

$\Rightarrow \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + b = (\sqrt{2}+1)b$ —— (1)

क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{b^2}{4}}$ —— (2)

यदि समकोण समद्विबाहु Δ की तुंगता P हो तो यह कर्ण की आधी होगी |

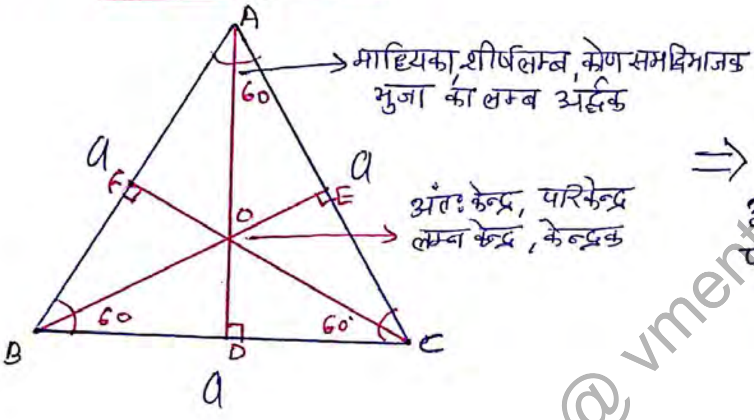


अर्थात $P = \frac{b}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

→ व यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta ADB \sim \Delta BDC$ होंगे |

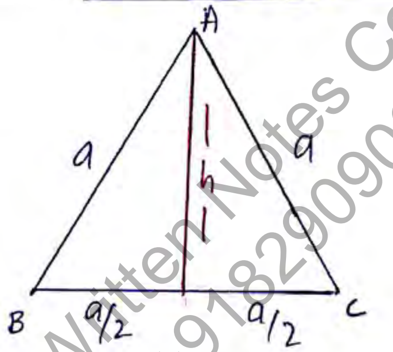
तथा $\Delta ADB \cong \Delta CDB$ होंगे |

समबाहु त्रिभुज :-



⇒ समबाहु Δ में चारों केन्द्र संपाती / अतिव्यापी / आच्छादी / एक ही बिन्दु पर होते हैं |

⇒ परिमाप, क्षेत्रफल व ऊँचाई :-



ऊँचाई $h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}a} \quad \text{—— (1)}$$

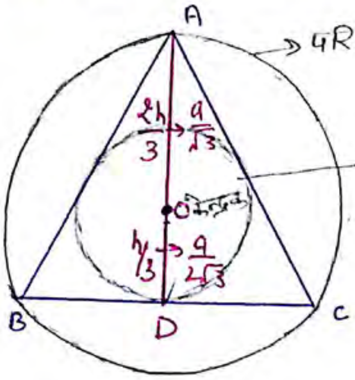
भुजा $a = \frac{2}{\sqrt{3}}h$ —— (2) or → $\boxed{\begin{matrix} a & : & h \\ 2 & : & \sqrt{3} \end{matrix}}$

परिमाप $\boxed{P \Rightarrow 3a}$ —— (3) क्षेत्रफल

$\Rightarrow 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} h$

$$\boxed{P = 2\sqrt{3}h} \quad \text{—— (4)}$$

समबाहु त्रिभुज में बने अंत:वृत, परिवृत का क्षेत्रफल :-



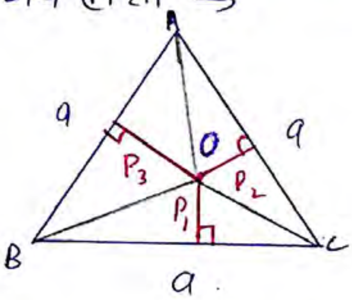
→ अन्त:वृत की त्रिज्या $R_{(i)} = \frac{h}{3} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ —(1)

∴ अन्त:वृत का क्षेत्रफल $= \frac{\pi h^2}{9} = \frac{\pi a^2}{12}$ —(2)

→ परिवृत की त्रिज्या $R_c = \frac{2h}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$ —(3)

→ परिवृत का क्षेत्रफल $A_c = \frac{4\pi h^2}{9} = \frac{\pi a^2}{3}$ —(4)

समबाहु △ में कोई बिन्दु 'O' व 'O' से डाले गये लम्ब (भुजाओं पर) दिये गये हो तो →

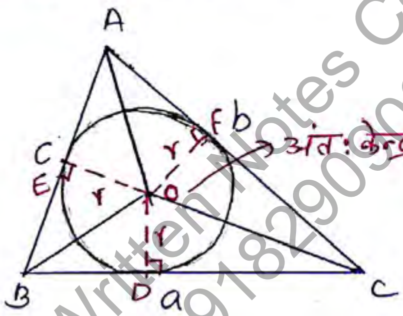


बिन्दु 'O' से भुजाओं पर डाले गये लम्ब P_1, P_2 व P_3 है तो

$\frac{1}{2}aP_1 + \frac{1}{2}aP_2 + \frac{1}{2}aP_3 = \frac{1}{2}ah.$

$\boxed{h = P_1 + P_2 + P_3}$ ∴ भुजा $\boxed{a = \frac{2}{\sqrt{3}}(P_1+P_2+P_3)}$

जब किसी △ की अंत: वृत की Radious व △ की भुजाये दे रखी हो-



△ABC का क्षेत्र० = △AOB + △BOC + AOC का क्षेत्र०

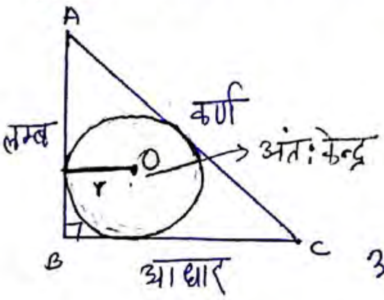
$= \frac{1}{2}\times c\times r + \frac{1}{2}\times a\times r + \frac{1}{2}\times b\times r$

$= \frac{1}{2}\times r\times(a+b+c)$

$= \frac{1}{2}\times r\times P$ (परिमाप) —(1)

अत: - $\boxed{\triangle ABC \text{ का क्षेत्र०} = \frac{1}{2}\times \text{परिमाप} \times \text{अन्त: त्रिज्या} = \text{अर्द्धपरिमाप} \times \text{अन्त:वृत की त्रिज्या}}$

अब किसी समकोण △ में →

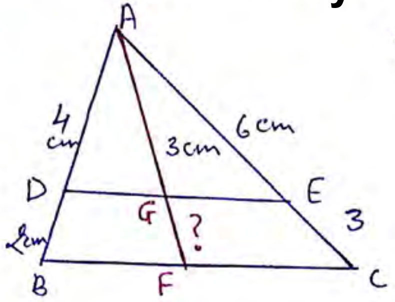


△ABC का क्षेत्र० $= \frac{1}{2}\times AB\times BC = \frac{1}{2}Pr$ (समी. (1) से)

∴ r (त्रिज्या) $= \frac{AB\times BC}{P} = \frac{\text{लम्ब}\times\text{आधार}}{\text{परिमाप}}$ —(3)

अत: अन्त: केन्द्र की त्रिज्या $r_i = \left(\frac{\text{लम्ब}+\text{आधार}-\text{कर्ण}}{2}\right)$ —(4)

Q> :- Δ में GF की लंबाई क्या होगी जब भुजा DE, BC के समान्तर हो।

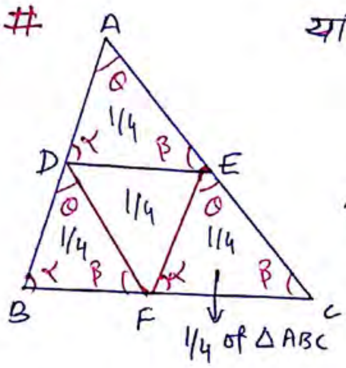


∵ यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ है अत :-

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{x}{y}$ होगा व $\frac{AB}{AD} = \frac{AF}{AG}$ (माध्यिका व भुजा का अनुपात)

so → $\frac{6}{4} = \frac{AF}{3} \Rightarrow AF = \frac{18}{4} = 4.5$ cm

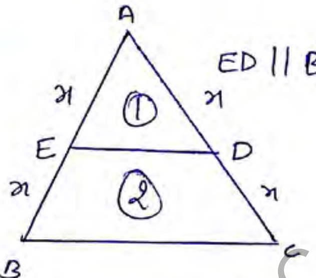
अतः $GF = AF - AG = 1.5$ cm ans



यदि D, AB व E, AC का मध्य बिन्दु हो तो (DE || BC)

or $\boxed{DE = \frac{1}{2} BC}$

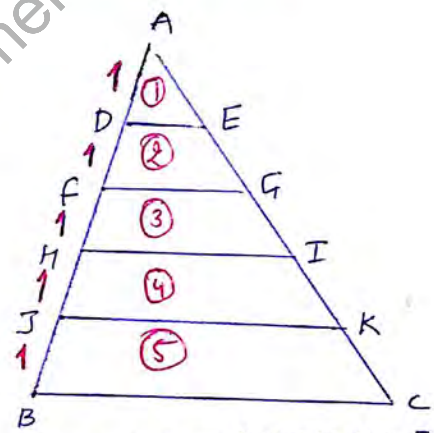
अर्थात → किसी Δ की दो भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा, उस Δ की तीसरी भुजा के समान्तर व आधी होती है।



Δ① का क्षेत्र. : Δ② का क्षेत्र.

$x^2 : (2x)^2 - x^2$

$1 : 3$



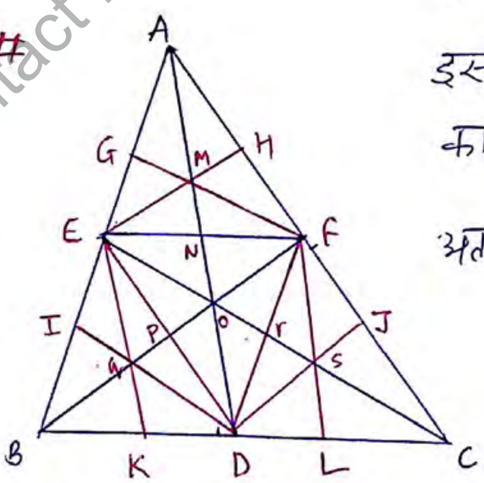
जब $AD = DF = FH = HJ = JB$ व $AE = EG = GI = IK = KC$ होतो

क्षेत्रफलों का अनुपात :→

Δ① : Δ② : ③ : Δ④ : Δ⑤

$1^2 : 2^2 - 1^2 : 3^2 - 2^2 : 4^2 - 3^2 : 5^2 - 4^2$

$\Rightarrow 1 : 3 : 5 : 7 : 9$ ans

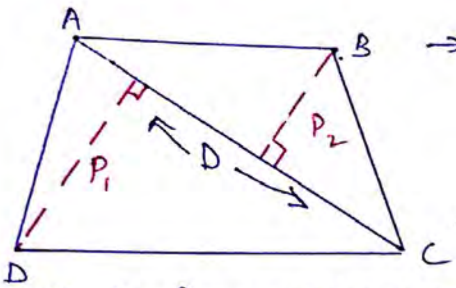


इस Δ ABC में माध्यिकाओं से बने प्रत्येक Δ का क्षेत्र मूल Δ ABC के क्षेत्र. का $\frac{1}{24}$ गुणा होगा।

अतः प्रत्येक छोटे Δ का क्षेत्र. =

$\frac{1}{24} \times$ Δ ABC का क्षेत्रफल

चतुर्भुज :- चार भुजाओ से घिरी आकृति।



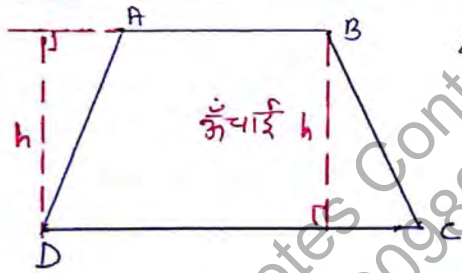
→ जब चारों भुजायें व एक विकर्ण दिया हो तो हीरेन formula (Δ में बाँटकर) क्षेत्र॰ ज्ञात करने के लिये use होगा।

→ जब विकर्ण से डाले गये लम्ब P_1 व P_2 दे रखे हो तो □ABCD का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} P_1 \times D + \frac{1}{2} P_2 \times D$ होगा।

चतुर्भुज के प्रकार :-

- ① समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium)
- ② समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)
- ③ सम चतुर्भुज (Rhombus)
- ④ आयत (Rectangle)
- ⑤ वर्ग (Square)

1. समलम्ब चतुर्भुज :- (AB ∥ DC)



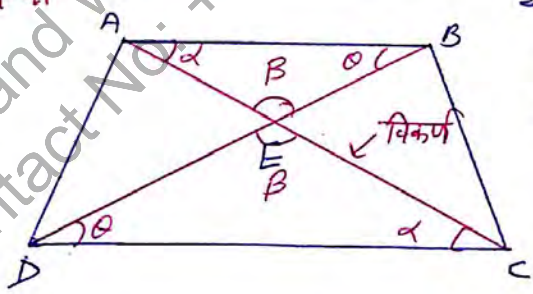
क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times AB \times h + \frac{1}{2} \times DC \times h$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \times h \times (AB + DC)$

$\boxed{A \Rightarrow \frac{1}{2}(AB + DC) \times h}$

or. समलम्ब चतु॰ का क्षेत्र॰ $= \frac{1}{2} \times$ (समान्तर भुजाओं का योग) × उनके बीच की दूरी

##



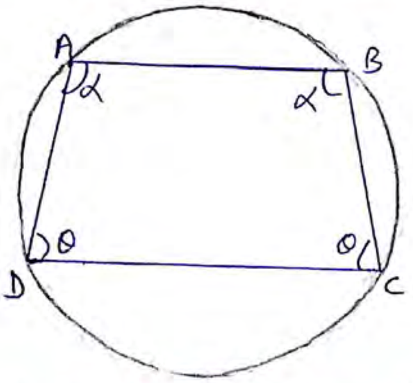
यदि AC व BD, समलम्ब चतु॰ के विकर्ण है तो यहाँ △ABE ~ △CDE

अतः $\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE} = \frac{AB}{DC}$

specially → $\boxed{\frac{AE}{CE} = \frac{BE}{DE}}$ विकर्ण के खण्डों के अनुपात

अतः समलम्ब चतुर्भुज में विकर्ण के खंडों का अनुपात समान रहता है।

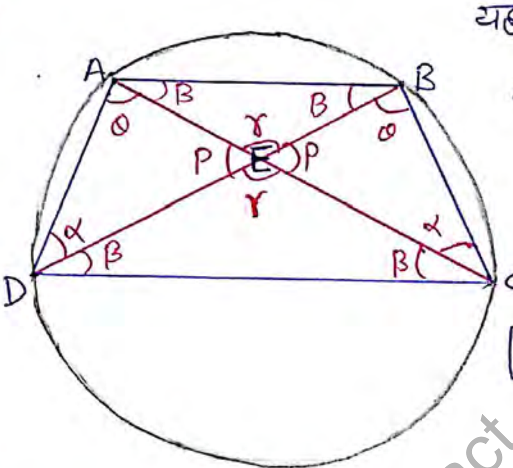
२. समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज :- (AB || DC) व (AD = BC) होगी



$\angle A + \angle C = 180^\circ$ or $\alpha + \theta = 180^\circ$ (चक्रीय चतु॰ के कारण)
$\angle B + \angle D = 180^\circ$ or $\alpha + \theta = 180^\circ$

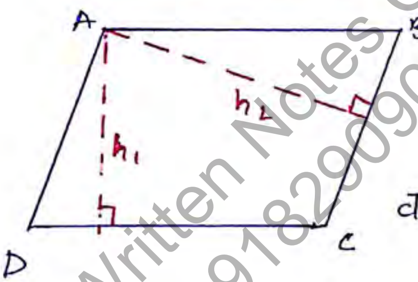
जीवा द्वारा एक ही वृत्तखण्ड में बने कोण बराबर होते हैं।

#



यहाँ इस चतु॰ में AC व BD विकर्ण हैं।
व $\triangle BCD \cong \triangle ADC$
$\triangle ABC \cong \triangle BAD$
$\triangle AED \cong \triangle BEC$
C पर → $\triangle ABE \sim \triangle CDE$
[AE = BE व CE = DE होंगे]

3. समान्तर चतुर्भुज :-



इस चतुर्भुज में →

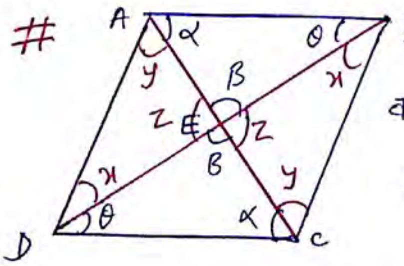
AB ‖ DC	∠A = ∠C	AB = DC
AD ‖ BC	∠B = ∠D	AD = BC

व $\angle A + \angle B = \angle B + \angle C = \angle C + \angle D = \angle D + \angle A = 180^\circ$
(आसन्न कोणों का योग 180° होगा)

⇒ क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(AB + DC) \times h$
$= \frac{1}{2} \times 2AB \times h$ या $\boxed{AB \times h_1 = BC \times h_2}$

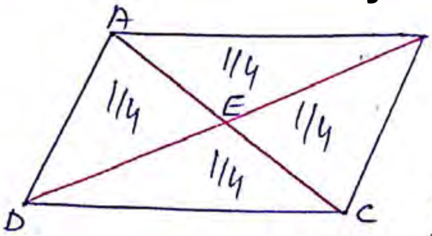
$\boxed{A = AB \times h_1}$

#



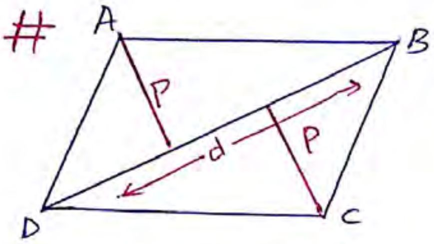
→ समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं → AE = CE व BE = DE
व यहाँ $\triangle ABE \cong \triangle CDE$ व $\triangle AED \cong \triangle CEB$
$\triangle ADC \cong \triangle ABC$ व $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ होंगे।

\# समान्तर चतुर्भुज के विकर्णों के प्रतिच्छेदन से चार Δ का निर्माण होगा। इन सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान व मूल चतुर्भुज का 1/4 गुणा होगा।



Reason → ΔADC के लिये DE व ΔBCD के लिये EC माध्यिका होगी जो दोनों त्रिभुजों के क्षेत्र. को आधा-आधा बाँटेगी।

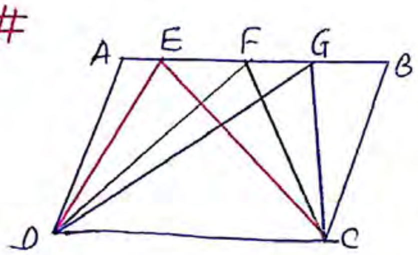
\#



यदि एक विकर्ण की लम्बाई d व उस पर बचे हुये शीर्षों से डाले गये लम्ब P हो तो

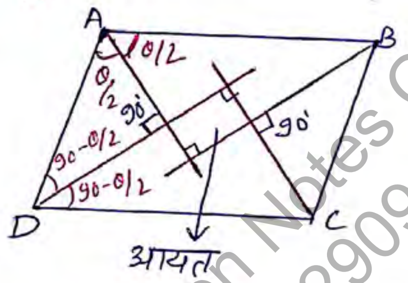
चतु. का क्षेत्र. $= \frac{1}{2}\cdot d\cdot P\times 2 = d.P$

\#



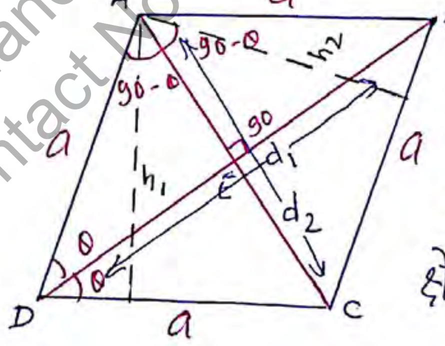
समान्तर चतु. की किसी एक भुजा को आधार मानकर व सामने वाली भुजा पर एक बिन्दु लेकर बनाये गये सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर व मूल चतुर्भुज का आधा होगा।

\#



समान्तर चतुर्भुज के आसन्न कोणों के समद्विभाजक हमेशा 90° पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा इनको आगे बढाने पर बनी आकृति आयत होगी।

4. समचतुर्भुज :- (AB = DC = BC = AD) व AB||DC तथा AD||BC



→ समचतुर्भुज में दोनों विकर्ण 90° पर प्रतिच्छेद करते हैं तथा ये अपने शीर्षों के कोण समद्विभाजक होते हैं।

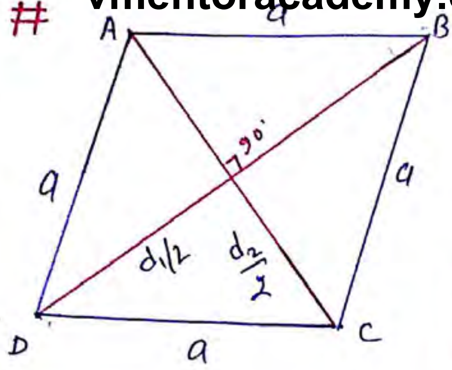
यहाँ $\cancel{a}.h_1 = \cancel{a}.h_2 \Rightarrow \boxed{h_1 = h_2}$ ऊँचाई

क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}\times d_2\left(\frac{d_1}{2}+\frac{d_1}{2}\right)$

$= \frac{1}{2} d_1 d_2$

सम चतु. का क्षेत्र. $A = \frac{1}{2}\times$ विकर्णों का गुणनफल

#



समचतुर्भुज में दोनों विकर्णों से बने चारों Δ सर्वांगसम होंगे।

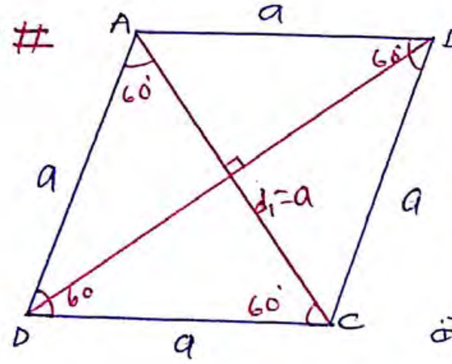
$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2$$

$$\boxed{a = \frac{1}{2}\sqrt{d_1^2 + d_2^2}}$$

or $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$

$$\boxed{d_2 = \sqrt{4a^2 - d_1^2}}$$

##



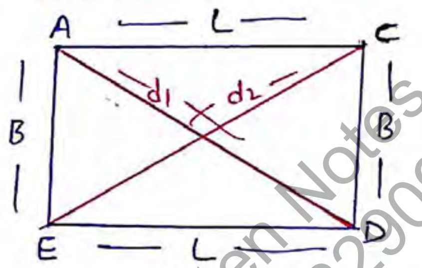
→ समचतुर्भुज में →
बड़े कोण का विकर्ण → छोटा
छोटे कोण पर विकर्ण → बड़ा

जब छोटा विकर्ण $d_1 = a$ हो तो
Δ ADC एक समबाहु Δ होगा अतः -

बड़ा विकर्ण $d_2 = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a = \boxed{d_2 = \sqrt{3}a}$

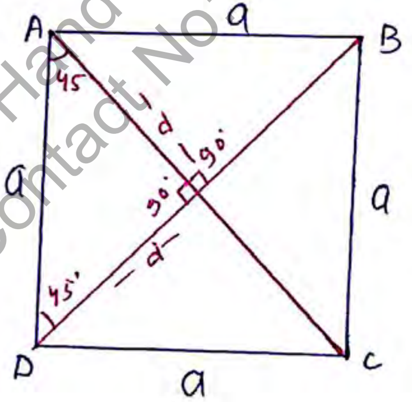
क्षेत्रफल (Δ ADC) $= \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$

5. आयत (Rectangle) :- (AC = ED व AE = CD) व $d_1 = d_2$



परिमाप (P) = 2(L+B)
क्षेत्रफल (A) = L×B

6. वर्ग (Square) : (AB = BC = CD = DA) व ∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90°



$$\boxed{d_1 = d_2 = d}$$

$$\boxed{d = \sqrt{2}a}$$

परिमाप $P = 4a$

क्षेत्रफल $A = a^2$

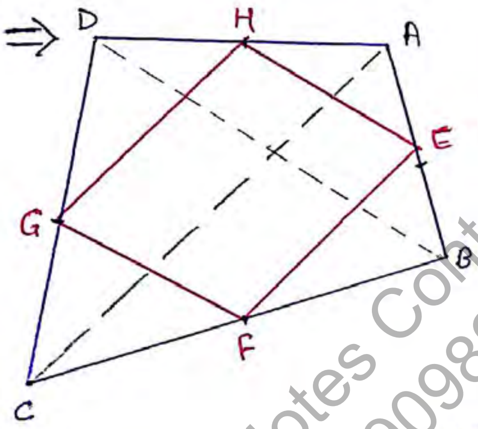
बहुभुज Important Points :-

समान विकर्ण वाला बहुभुज :→ समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज
→ आयत
→ वर्ग

विकर्ण शीर्ष के आन्तरिक समद्विभाजक → सम चतुर्भुज
→ वर्ग

विकर्ण परस्पर समद्विभाजक → समान्तर चतुर्भुज
→ सम चतुर्भुज
→ आयत
→ वर्ग

विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजक → समचतुर्भुज
→ वर्ग

⇒ 

किसी भी चतुर्भुज के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बना चतुर्भुज समान्तर होता है।

Reason :- यहाँ ΔADB में

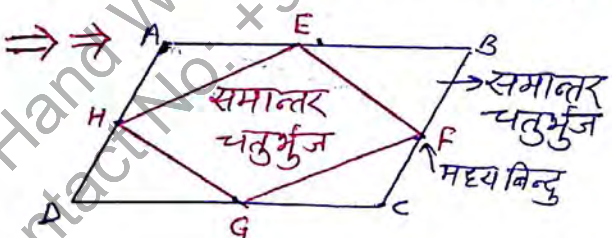
HE → BD के समान्तर व उसकी 1/2

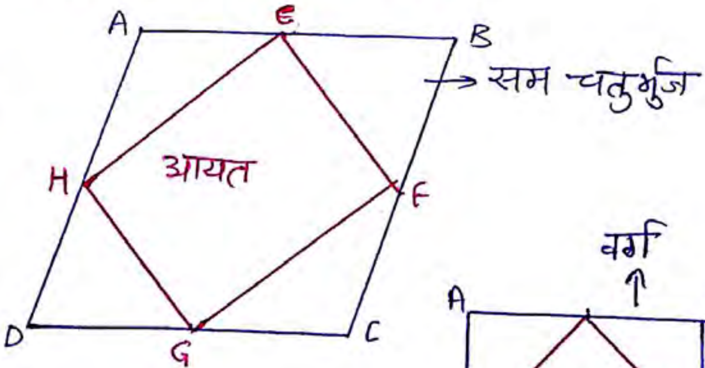
ΔBCD में →

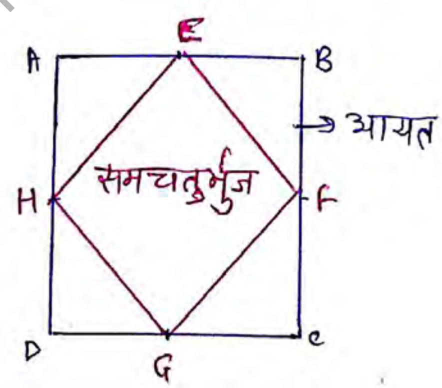
FG → BD के समान्तर व उसकी 1/2

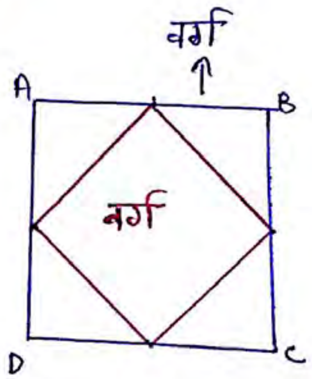
अतः $HE \parallel FG$ व $HE = FG$

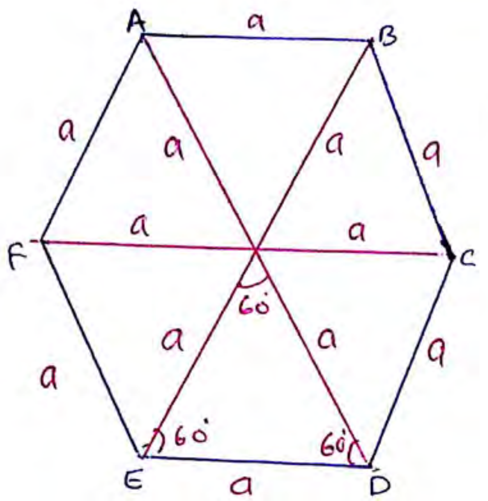
इसी प्रकार $GH \parallel EF$ व $GH = EF$ अतः EFGH समान्तर चतुर्भुज होगा व इसका क्षेत्रफल मूल चतुर्भुज का आधा होगा।

⇒ 







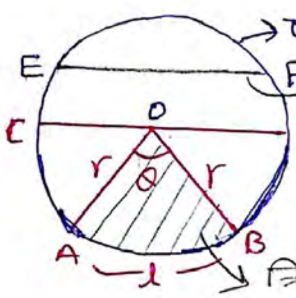


विकर्ण $d = 2a$

क्षेत्रफल $= 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

$$\boxed{A = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2}$$

वृत (Circle) :-



चाप $\overrightarrow{AB} = \theta°$

$\overrightarrow{BA} = 360° - \theta°$

वृत की सबसे बड़ी जीवा व्यास होती है।

त्रिज्यखण्ड → $\theta < 180°$ → लघु त्रिज्यखंड

$\theta > 180°$ → दीर्घ त्रिज्यखण्ड

→ परिधि $c = 2\pi r$

→ क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

→ चाप की लंबाई $l = \frac{\theta}{360°} \times 2\pi r$ —(1)

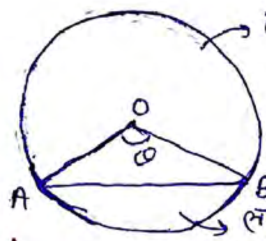
→ त्रिज्यखण्ड का क्षेत्रफल $A = \frac{\theta°}{360°} \times \pi r^2$ —(2)

→ यदि θ रेडियन में हो $l = \frac{\theta}{2\pi} \times 2\pi r \Rightarrow \boxed{l = \theta . r}$

समी. (1) व (2) से →

→ $\frac{A}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} l r}$

→ त्रिज्यखण्ड का परिमाप $= l + 2r$



↓

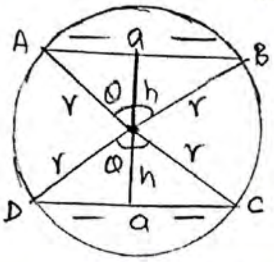
लघु वृतखण्ड का क्षेत्रफल

= त्रिज्यखंड का क्षेत्र. − Δ का क्षेत्रफल

⇒ दीर्घ वृतखंड का क्षेत्रफल

= (त्रिज्यखण्ड + Δ) का क्षेत्रफल

समान लम्बाई की जीवायें केन्द्र से समान दूरी पर होती है।

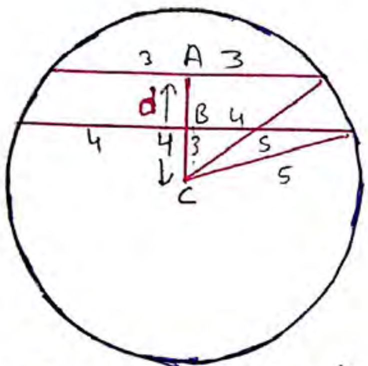


→ बड़ी जीवा की केन्द्र से दूरी – कम
→ छोटी जीवा की केन्द्र से दूरी – ज्यादा

→ बराबर लम्बाई की जीवायें केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती है।
(See Circle)

जीवाओं के बीच की दूरी :–

(A) जब जीवायें केन्द्र के एक ही तरफ व समान्तर हो →



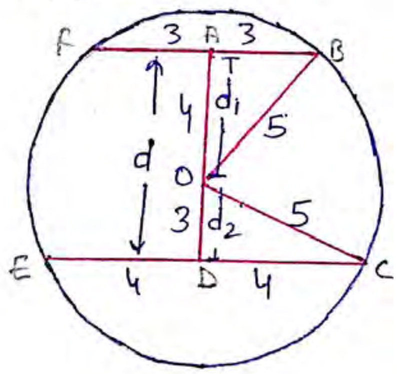
जीवाओं के बीच की दूरी $\boxed{d = d_1 - d_2}$

Ex : इस Circle में $d = 4 - 3 = 1\,cm$
(AB) (AC) (BC)

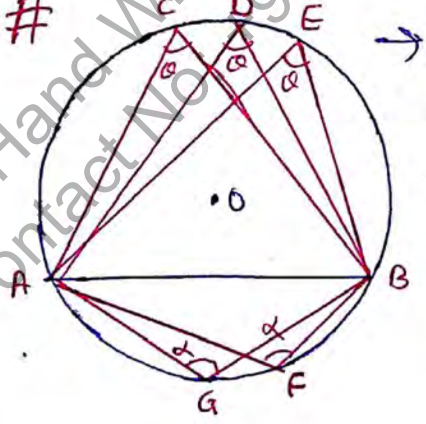
(B) जब दोनों जीवायें केन्द्र के विपरित व समान्तर हो –

जीवाओं के बीच की दूरी $\boxed{d = d_1 + d_2}$

Ex : इस Circle में $d = 4 + 3 = 7\,cm$



#



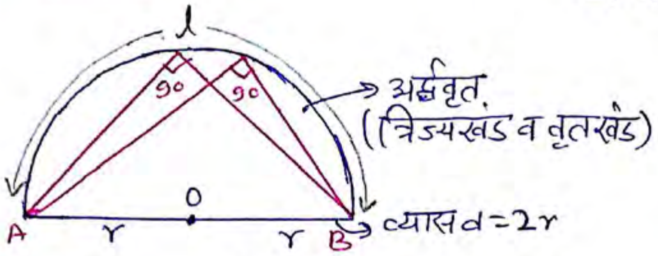
→ किसी भी जीवा द्वारा एक ही वृतखण्ड में बने कोण बराबर होते है।

→ दीर्घ वृतखण्ड में बना कोण → न्युन कोण

→ लघु वृतखण्ड में बना कोण → अधिक कोण

यहाँ $\boxed{\angle\theta + \angle\alpha = 180^\circ}$

अर्द्धवृत :-



चाप की लम्बाई $l = \pi r$

अर्द्धवृत का परिमाप $= l + 2r$

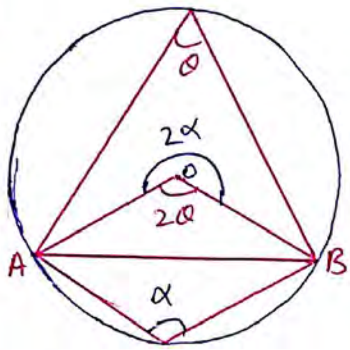
$\Rightarrow \pi r + 2r$

$$\boxed{P = (\pi + 2) r}$$

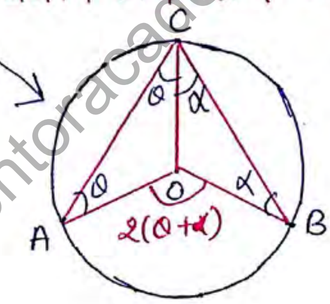
अर्द्धवृत का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}\pi r^2$

→ अर्द्धवृत में बने कोण समकोण होते हैं।

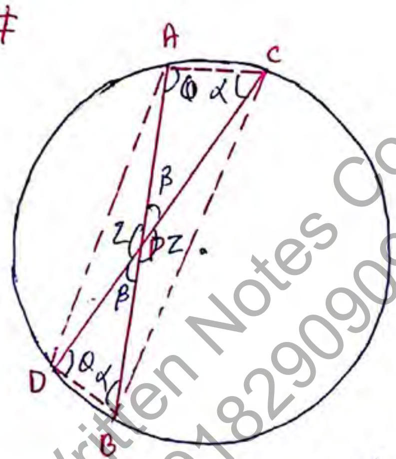
#



किसी भी जीवा द्वारा → केन्द्र पर बनाया गया कोण, परिधि पर बनाये गये कोण का दुगुना होता है।



#



यहाँ $\Delta APC \sim \Delta DBP$

अतः संगत भुजाये समानुपाती होंगी

So → $\frac{AP}{DP} = \frac{CP}{BP}$

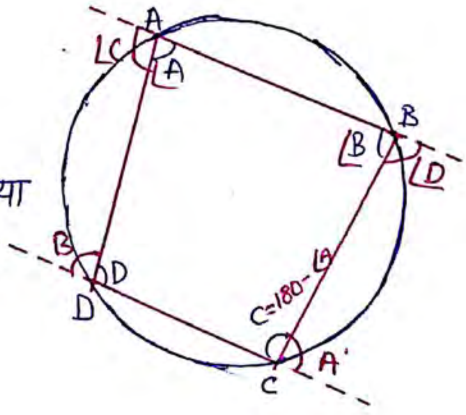
$$\boxed{AP \times BP = CP \times DP}$$

→ यदि दो जीवाये किसी बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं तो उस बिन्दु पर एक जीवा के दोनों खण्डों का गुणनफल, दुसरी जीवा के खण्डों के गुणनफल के बराबर होता है।

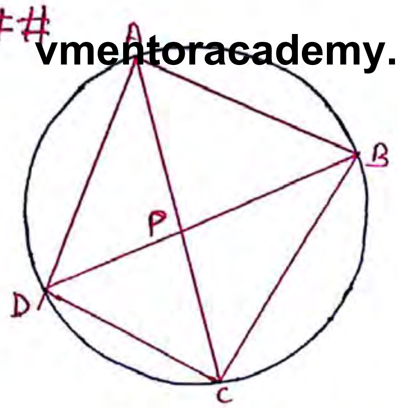
चक्रीय चतुर्भुज :-

$$\boxed{\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ}$$

→ किसी चक्रीय चतुर्भुज की किसी भुजा को आगे बढ़ाया जाये तो इस प्रकार बना बहिष्कोण, अन्तराभिमुख कोण के बराबर होता है।



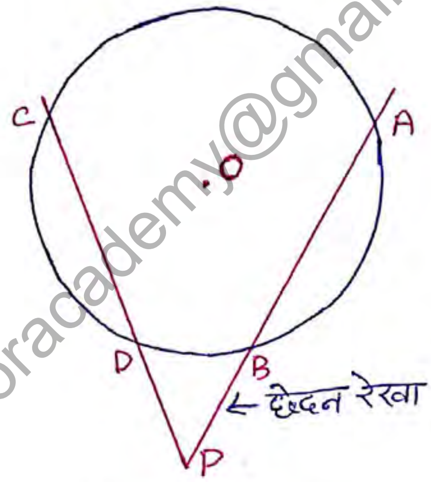
यदि ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज हो तथा AC तथा BD विकर्ण एक दूसरे को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करते हो तो



$$\boxed{AP \times PC = BP \times PD}$$

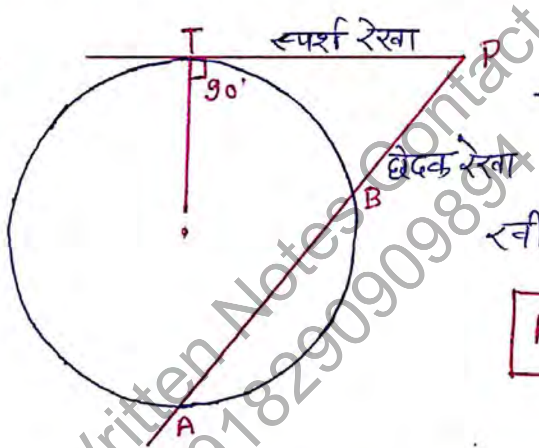
जब किसी बाह्य बिन्दु P से वृत पर दो छेदन रेखा खींची जाये तो बाह्य विभाजन के नियम से →

$$\boxed{AP \times BP = CP \times DP}$$



किसी वृत पर स्पर्श रेखाओं की संख्या → अनंत

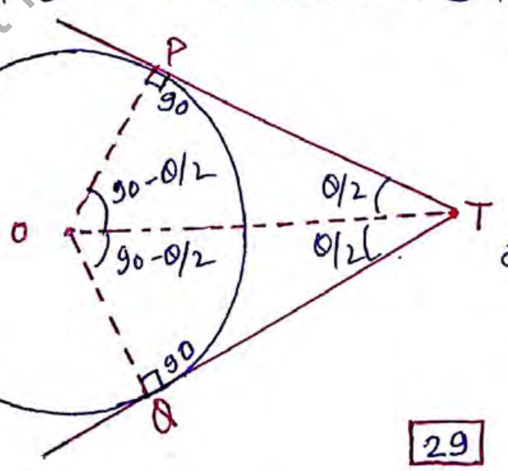
#



→ यदि किसी बाह्य बिन्दु P से वृत पर एक स्पर्श रेखा PT व एक छेदक रेखा PA, जो वृत को A व B पर काटती है, खींची जाये तो बाह्य विभाजन से

$$\boxed{AP \times BP = TP^2}$$

किसी बाह्य बिन्दु से वृत पर अधिकतम दो स्पर्श रेखायें खींची जा सकती है व ये बराबर होती है।



यहाँ $\triangle POT \cong \triangle QOT$

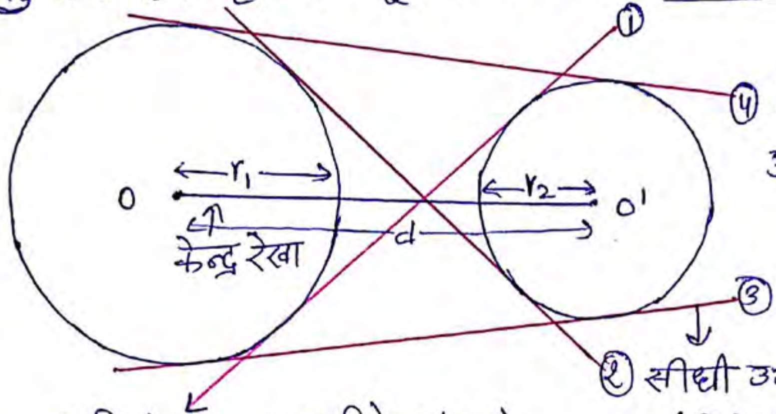
अतः- $\boxed{TP = TQ}$

व $OT^2 = OP^2 + TP^2$ —①

$OT^2 = OQ^2 + TQ^2$ —②

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा :-

(A) जब दोनों वृत्त एक दूसरे को स्पर्श नहीं करते हो :-



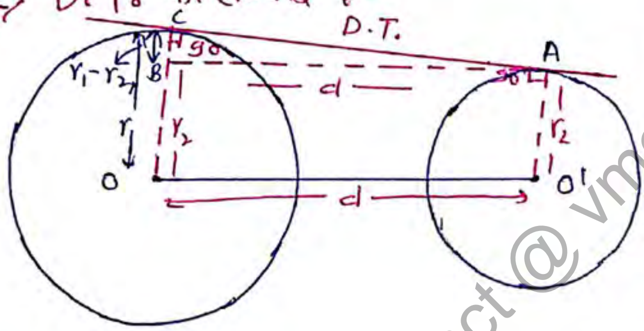
$d > r_1 + r_2$

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखायें - चार (4)

② सीधी उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा (D.T.)
(Direct Tangent)

तिर्यक / अनुप्रस्थ स्पर्श रेखा (T T)
(Transverse Tangent)

⇒ D.T. की लम्बाई :-



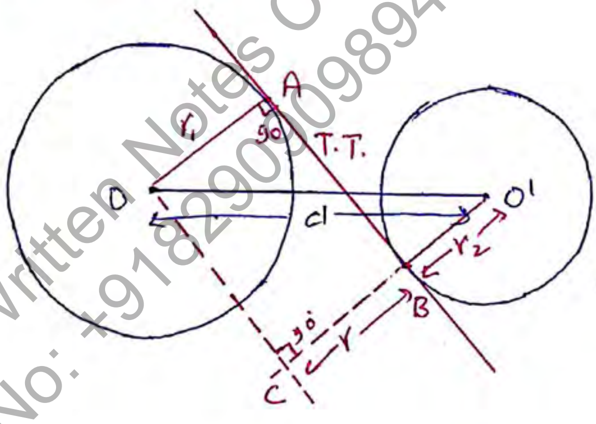
ΔABC में

$d = \sqrt{(D.T.)^2 + (r_1 - r_2)^2}$

या

$$\boxed{D.T. = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}}$$

⇒ T.T. की लम्बाई :-



$\Delta OO'C$ में →

$OC = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}$

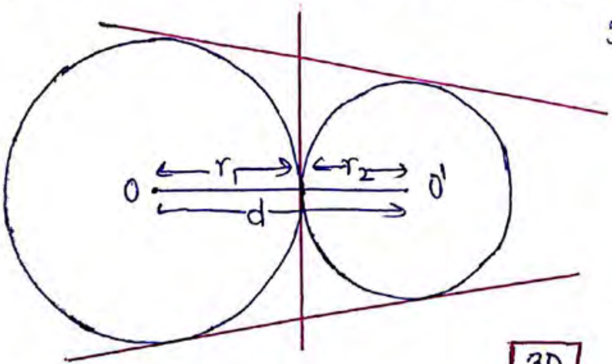
or $\boxed{T.T. = \sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}}$

अतः :-

$\boxed{D.T. > T.T.}$

(B) जब दो वृत्त एक एक दूसरे को स्पर्श कर रहे हो →

उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा → तीन (3)

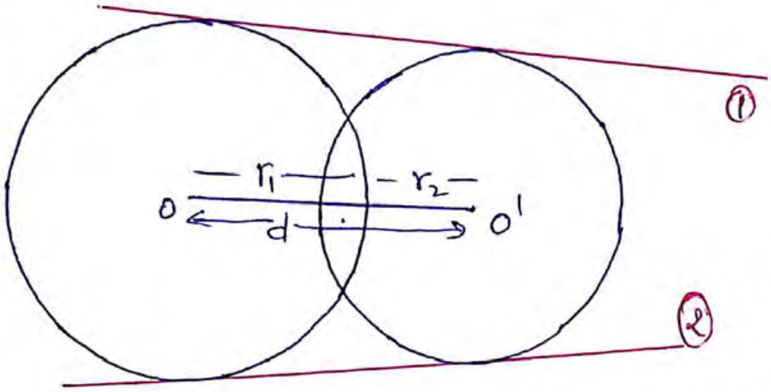


$d = r_1 + r_2$

$$\boxed{D.T. = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}}$$

$$\boxed{T.T. = 0}$$

(C) जब दोनों वृत प्रतिच्छेद करते हो–

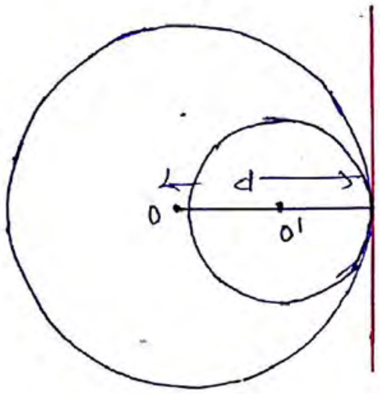


$d = r_1 - r_2$

$$\boxed{D.T. = \sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}}$$

T.T. → absent.

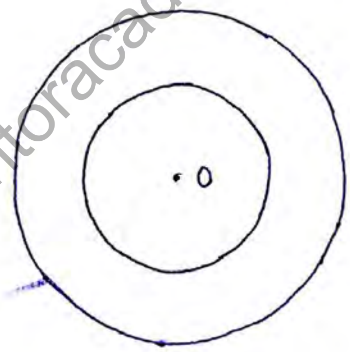
(D) आन्तरिक स्पर्शी हो →



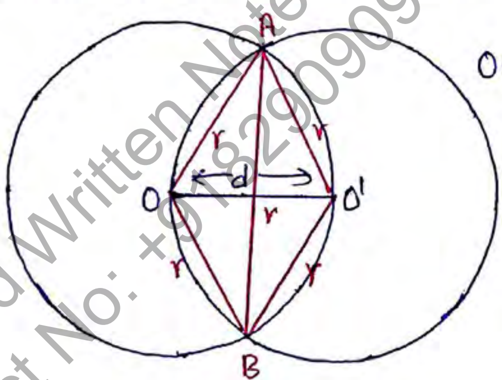
$d = r_1 - r_2$

(E) संकेन्द्रीय वृत :-

$d = 0$



⇒ जब समान त्रिज्या के दो वृत एक-दूसरे के केन्द्र से गुजर रहे हो →



$OO' = d = r$

$\boxed{AB = \sqrt{3}\,r}$ → समबाहु Δ की ऊँचाई × २

THANKS [@ak]

– ANIL KR. KUMAWAT